Apéndice B
Cómo resolver problemas que tratan "%"

Hace 20 años, cuando trabajaba de asesor voluntario en un programa parecido a la preparatoria abierta, conocí a un muchacho que manejaba bien el álgebra, pero no recordaba cómo resolver problemas con porcentajes. En vez de pedirle memorizar de nuevo las técnicas usuales para resolverlos, le pedí permiso para hacer un experimento: le enseñaría tratarlos como problemas del álgebra. Funcionó. Por lo tanto, nunca he vuelto a enseñar las técnicas usuales. Prefiero que los alumnos resuelvan estos problemas como otros que ya conocen: hay incógnitas que encontrar, y esto se puede hacer traduciendo el problema en una ecuación, para luego despejar las incógnitas.

Favor de notar que este capítulo es basado en lecciones que escribí para niños de mis clases de ciencias. Entonces, muchos de mis ejemplos tratan chistes o cosas que estaban pasando en mis clases.

En este capítulo:

- ¿Qué quiere decir " % "?
- ¿Para qué sirven los porcentajes?
- Cómo cambiar fracciones y decimales en porcentajes, y porcentajes en números decimales.
- La idea clave: en problemas con porcentajes, la palabra "de" se traduce como "por". Es decir, se traduce como " × ".
- Las tres clases de problemas básicos
  - **Clase I**: "¿Qué porcentaje de 30 es 12?"
  - **Clase II**: "El 10% de un número desconocido es 3. ¿Cuál es el número?'
  - **Clase III**: "¿Qué es el 20% de 80?"
- Problemas que tratan el % de aumento o decremento
  - **Clase IV:** Problemas que nos cuentan el precio nuevo y el porcentaje de incremento, y nos piden el precio viejo.

    Ejemplo: "El precio de hidras subió en un 25%, y actualmente es de 750 pesos por kilo. ¿Cuál fue el precio viejo?"
  - **Clase V:** Problemas que nos cuentan el precio viejo y el porcentaje de incremento, y nos piden el precio nuevo.

Ejemplo: "El consumo de café era de 50 litros cada gorila, pero subió en un 20%. ¿Cuál es el consumo actual?"

– **Clase VI**: Problemas que nos cuentan el precio nuevo y el porcentaje de decremento, y nos piden el precio viejo.

Ejemplo: "El precio de tiburones se ha bajado en un 25%, y actualmente es de 9000 pesos cada uno. ¿Cuál fue su precio antes?"

– **Clase VII:** Problemas que nos cuentan el precio viejo y el porcentaje de decremento, y nos piden el precio nuevo.

Ejemplo: "El precio de tigres era de 16,000 peso cada uno, pero se bajó en un 10%. ¿Cuál es el precio actual?"

– **Clase VIII:** Problemas que nos cuentan los valores viejos y actuales, y nos piden el porcentaje de incremento o decremento.

Ejemplo: "El precio de tigres era de 16,000 pesos cada uno, pero actualmente es de 20,000. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento?"

– **Clase IX:** Problemas que tratan aumentos o decrementos, pero en verdad son problemas básicos disfrazados.

Ejemplo: "El precio de hormigas subió 30 pesos el kilo. Si este incremento fue un 15% del precio viejo, ¿cuál fue el precio viejo?"

¿Qué quiere decir "porcentaje"?

Podemos explicarlo mejor cambiando la pregunta en "¿Qué quiere decir 'por ciento'?" Esta última se puede contestar dando ejemplos comunes del uso de "por ciento".

- Cuando un banco nos dice que su tasa de interés es de 10 por ciento, esto significa que el banco nos pagará 10 pesos **por** cada **cien** pesos en nuestra cuenta.
- Cuando el gobierno nos cobra impuestos iguales al 8 por ciento de nuestros ingresos, esto quiere decir que tendremos que pagar 8 pesos **por** cada **cien** pesos que ganamos.
- Cuando los noticieros nos dicen que cierta industria produce el 15 por ciento del producto bruto e la República, esto quiere decir que **por** cada **cien** pesos del producto bruto, 15 pesos vienen de las actividades de esa industria.

Ya ves, supongo, de dónde vino el término "**por ciento**".

¿Para qué sirven los porcentajes?

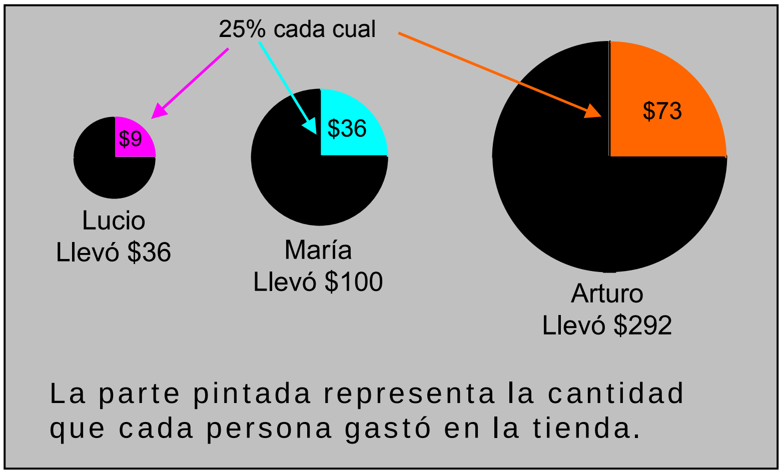
Los porcentajes son, en verdad, una clase de fracción, y tienen los mismos usos. Uno de los usos comunes puede verse examinando un ejemplo. La información que sigue

Lucio llevó 36 pesos a la tienda, y gastó 9. María llevó 100 y gastó 25. Arturo llevó 292 y gastó 73.

podría ser comunicado también como

Lucio llevó 36 pesos a la tienda, María llevó 100, y Arturo llevó 292. Cada uno gastó $\frac{1}{4}$ del dinero que llevó.

Entonces, ¿por qué usar la una en vez de la otra? Es que hay veces cuando nos interesa más cuánto dinero se gastó por cada persona, y otras veces cuando nos interesa más cuál *fracción* de su dinero cada persona gastó. Lo ideal sería usar una gráfica como la siguiente para comunicar toda esta información a la vez, pero no siempre se puede hacerlo.



Bueno, las fracciones sirvieron en este caso para comunicar la proporción que cada cual gastó, pero ¿qué tal si la situación hubiera sido así?

Lucio llevó 36 pesos a la tienda, y gastó 10. María llevó 100 y gastó 26. Arturo llevó 292 y gastó 75.

En este caso podríamos con toda razón decir lo siguiente, usando fracciones para comparar las porciones gastadas:

Lucio llevó 36 pesos a la tienda, y gastó $\frac{10}{36}$ del mismo. María llevó 100 y gastó $\frac{26}{100}$ de esta cantidad. Arturo llevó 292 y gastó $\frac{75}{292}$ del mismo.

Sin embargo, debido a la complejidad de las fracciones sería molesto saber quién gastó la mayor proporción del dinero que llevó. En cambio, sería fácil saberlo si dijéramos

Lucio llevó 36 pesos a la tienda y gastó el 27.8% del mismo. María llevó 100 y gastó el 26% de esta cantidad. Arturo llevó 292 y gastó 25.8% del mismo.

Bueno, se ve que los porcentajes son muy útiles. Pero ¿cómo cambiar fracciones en porcentajes? Tratamos este tema a continuación.

A propósito, la misma información se puede comunicar de forma completa como sigue, por muy molesto que resultaría leerla:

Lucio llevó 36 pesos a la tienda y gastó el 27.8% (10 pesos) del mismo. María llevó 100 y gastó el 26% (26 pesos) de esta cantidad. Arturo llevó 292 y gastó 25.8% (75 pesos) del mismo.

Cómo cambiar fracciones y decimales en porcentajes, y porcentajes en números decimales

Los números decimales se cambian en porcentajes multiplicándolos por 100. Por ejemplo:

Cabe mencionar que cuando cambiamos un decimal en un porcentaje, en verdad estamos encontrando cuál sería la fracción de denominador 100 que sea equivalente al decimal. Es decir, al cambiar 0.7 en un porcentaje, estamos resolviendo la ecuación

$$0.7 = \frac{x}{100},$$

donde x es el porcentaje equivalente a 0.7.

Por supuesto, la fracción de denominador 100 equivalente al decimal dado resultará, con frecuencia, ser un "fracción fea". Por ejemplo,

$$0.375 = \frac{37.5}{100}.$$

Pero no importa: por muy fea que sea, sí es una fracción, y es de denominador 100.

El número decimal 0.7 es equivalente a 70%. (0.7 × 100 = 70)

El número decimal 0.2 es equivalente a 20%. (0.2 × 100 = 20)

El número decimal 0.35 es equivalente a 35%. (0.35 × 100 = 35)

El número decimal 1.5 es equivalente a 150%. (1.5 × 100 = 150)

Los números fraccionarios se cambian en porcentajes cambiándolos primero en números decimales, para luego cambiar estos últimos en porcentajes de la manera arriba descrita. Por ejemplo:

El número fraccionario $\frac{1}{2}$ se cambia en un decimal dividiendo el numerador por el denominador: 1 ÷ 2 = 0.5, el cual es equivalente a 50%. (0.5 × 100 = 50)

El número fraccionario $\frac{3}{5}$ se cambia en un decimal dividiendo el numerador por el denominador: 3 ÷ 5 = 0.6, el cual es equivalente a 60%. (0.6 × 100 = 60)

El número fraccionario $\frac{7}{8}$ se cambia en un decimal dividiendo el numerador por el denominador: 7 ÷ 8 = 0.875, el cual es equivalente a 87.5%. (0.875 × 100 = 87.5)

El número fraccionario $\frac{5}{2}$ se cambia en un decimal dividiendo el numerador por el denominador: 5 ÷ 2 = 2.5, el cual es equivalente a 250%. (2.5 × 100 = 250)

La cifra con barra ($\overline{6}$) indica que la misma cifra (la 6) sigue repitiéndose sin terminar.

Este símbolo(o sea, la barra) puede usarse también cuando más de una cifra se repite. Por ejemplo,

0.235235235235235235…

puede escribirse como $0.\overline{235}$. Eso porque la secuencia "235" se repite sin terminar. A propósito, $0.\overline{235}$ es la representación decimal de la fracción $\frac{235}{999}$. (Compruébalo con tu calculadora.)

Y ¿qué hacer cuando la fracción da un decimal que no termina, como $\frac{2}{3}$?

$$2 \div 3 = 0.66666666666666666666666666666666666666666\overline{6}$$

En este caso, tenemos que decidir cuántas cifras nos toca usar. Por ejemplo, si quisiéramos usar sólo dos cifras, rondearíamos

$$0.6666666666666666666666666666666666666666\overline{6}$$

a dos cifras

0.67

antes de multiplicarlo por 100:

0.67 × 100 = 67%.

En cambio, si quisiéramos usar 4 cifras, rondearíamos

$$0.6666666666666666666666666666666666666666\overline{6}$$

a 4 cifras

0.6667

antes de multiplicarlo por 100:

0.6667 × 100 = 66.67%.

Para cambiar porcentajes en decimales, se divide el porcentaje por 100. Por ejemplo:

25% = 0.25, ya que 25 ÷ 100 = 0.25

60% = 0.60	(60 ÷ 100 = 0.60)
10% = 0.10	(10 ÷ 100 = 0.10)
280% = 2.80	(280 ÷ 100 = 2.80)
83.33% = 0.8333	(83.33 ÷ 100 = 0.8333)

La idea clave: en problemas con porcentajes, la palabra "de" se traduce como "por".

En algunos casos, ésta no es la manera más rápida y fácil de resolver un problema, pero sí te ayudará a entenderlo bien. Los conocimientos que ganarás usando esta técnica te permitirán usar otras formas en el futuro.

Las tres clases de problemas básicos

Clase I: Problemas de la forma, "¿Qué porcentaje de 30 es 12?"

Para resolver este problema, usamos nuestra estrategia de traducir "de" como "por" escribiendo

¿Qué porcentaje **por** 30 es 12?

Ya que desconocemos el porcentaje, lo representamos con el símbolo **x**, de manera que

x por 30 es 12.

Usando " · " para la multiplicación y "=" para la palabra "es", se obtiene la "traducción" completa:

$\mathbf{x} \cdot 30 = 12$

Esta traducción es una ecuación en la cual se puede despejar al **x** para obtener

$\mathbf{x} = \frac{12}{30} = 0.40$, o sea,

x = 40%, ya que 0.40 es equivalente a 40% (p. 9-3).

Otro ejemplo:

¿Qué porcentaje de 50 es 15?

Éste se transforma en

¿Qué porcentaje **por** 50 es 15?

Por desconocer el porcentaje, lo representamos con el símbolo **x**, de manera que

x por 50 es 15.

Usando " · " para la multiplicación y "=" para la palabra "es", se obtiene la traducción completa:

$\mathbf{x} \cdot 50 = 15$

Esta traducción es una ecuación en la cual se puede despejar al **x** para obtener

$\mathbf{x} = \frac{15}{50} = 0.3$, o sea,

$\mathbf{x} = 30\%$.

Otro ejemplo:

¿Qué porcentaje de 250 es 150?

Éste se transforma en

¿Qué porcentaje **por** 250 es 150?

Por desconocer el porcentaje, lo representamos con el símbolo **x**, de manera que

x por 250 es 150.

Usando " · " para la multiplicación y "=" para la palabra "es", se obtiene la traducción completa:

$\mathbf{x} \cdot 250 = 150$

Ahora, se despeja al **x** para obtener

$\mathbf{x} = \frac{150}{250} = 0.6$, o sea,

$\mathbf{x} = 60\%$.

Como el último ejemplo:

¿Qué porcentaje de 400 es 216?

Usando la técnica que ya conocemos, transformamos la pregunta en la ecuación

$\mathbf{x} \cdot 400 = 216$,

luego

$\mathbf{x} = \frac{216}{400} = 0.52$, o sea,

$\mathbf{x} = 52\%$.

Clase II: "El 10% de un número desconocido es 3. ¿Cuál es el número?'

El primer paso en la resolución de esta clase de problema es de pensar o escribir,

"El 10% **por** un número desconocido es 3."

Usamos **x** para representar el número desconocido, de manera que

"El 10% **por** un número desconocido es 3"

se convierte en

"El 10% por **x** es 3."

Y para terminar la traducción, se escribe " · " en vez de "por", y " = " en lugar de "es":

$10\% \cdot \mathbf{x} = 3$

Para despejar el **x**, es necesario cambiar "10%" en el número decimal equivalente a éste. Ya que

10% quiere decir $\frac{10}{100}$, y $10 \div 100 = 0.1$,

se tiene

$0.1 \cdot \mathbf{x} = 3$.

Ahora, se despeja al **x** dividiendo ambos lados entre 0.1, con el resultado

$\mathbf{x} = \frac{3}{0.1} = 30$.

Otro ejemplo:

El 60% de un número desconocido es 9. ¿Cuál es el número?'

El primer paso en la resolución es de pensar o escribir,

"El 60% **por** un número desconocido es 9"

Usamos **x** para representar el número desconocido, de manera que

"El 60% **por** un número desconocido es 9."

se convierte en

"El 60% por **x** es 9."

Y para terminar la traducción, se escribe " · " en vez de "por", y " = " en lugar de "es":

$60\% \cdot \mathbf{x} = 9$

Para despejar el **x**, es necesario cambiar "60%" en el número decimal equivalente a éste. Ya que

10% quiere decir $\frac{60}{100}$, y $60 \div 100 = 0.6$,

se tiene

$0.6 \cdot \mathbf{x} = 9$.

Ahora, se despeja al **x** dividiendo ambos lados entre 0.6, con el resultado

$\mathbf{x} = \frac{9}{0.6} = 15$.

Otro ejemplo:

El 40% de un número desconocido es 100. ¿Cuál es el número?'

El primer paso en la resolución es de pensar o escribir,

"El 40% **por** un número desconocido es 100."

Usamos **x** para representar el número desconocido, de manera que

“El 40% **por** un número desconocido es 100”

se convierte en

“El 40% por **x** es 100.”

Y para terminar la traducción, se escribe “ · “ en vez de “por”, y “ = “ en lugar de “es”:

40% · **x** = 100

Para despejar el **x**, es necesario cambiar “40%” en el número decimal equivalente a éste. Ya que

40% quiere decir $\frac{40}{100}$, y 40 ÷ 100 = 0.4,

se tiene

0.4 · **x** = 100.

Ahora, se despeja al **x** dividiendo ambos lados entre 0.4, con el resultado

x = $\frac{100}{0.4}$ = 250.

Otro ejemplo:

El 25% de un número desconocido es 30. ¿Cuál es el número?’

El primer paso en la resolución es de pensar o escribir,

“El 25% **por** un número desconocido es 30.”

Usamos **x** para representar el número desconocido, de manera que

“El 25% **por** un número desconocido es 30.”

se convierte en

“El 25% por **x** es 30.”

Y para terminar la traducción, se escribe “ · “ en vez de “por”, y “ = “ en lugar de “es”:

25% · **x** = 30

Para despejar el **x**, es necesario cambiar “25%” en el número decimal equivalente a éste. Ya que

25% quiere decir $\frac{25}{100}$, y 25 ÷ 100 = 0.25,

se tiene

0.25 · **x** = 30.

Ahora, se despeja al **x** dividiendo ambos lados entre 0.25, con el resultado

x = $\frac{30}{0.25}$ = 120.

Otro ejemplo:

El 35% de un número desconocido es 56. ¿Cuál es el número?’

Usando la técnica que ya conocemos, transformamos la pregunta en la ecuación

$0.35 \cdot \mathbf{x} = 56,$

luego

$\mathbf{x} = \frac{56}{0.35} = 160.$

Clase III: “Qué es el 20% de 80?”

El primer paso en la resolución de esta clase de problema es de reconocer que la pregunta

“Qué es el 20% de 80?”

quiere preguntar, en verdad,

“Qué número es el 20% de 80?”

Entonces, se piensa o se escribe

“Qué número es el 20% **por** 80?”

Usamos **x** para representar el número desconocido, de manera que

“Qué número es el 20% **por** 80?”

se convierte en

“**x** es el 20% **por** 80”

Y para terminar la traducción, se escribe “ · “ en vez de “por”, y “ = “ en lugar de “es”:

$\mathbf{x} = 20\% \cdot 80.$

Para despejar al **x**, es necesario cambiar “20%” en el número decimal equivalente a éste. Ya que

20% quiere decir $\frac{20}{100}$, y $20 \div 100 = 0.2$,

se tiene

$\mathbf{x} = 0.2 \cdot 80$

Pero ya se nota que esta vez, la respuesta no se encuentra despejando al **x**. En cambio, el valor de **x** se encuentra efectuando la multiplicación:

$\mathbf{x} = 0.2 \cdot 80 = 0.16.$

Otro ejemplo:

“Qué es el 25% de 40?”

El primer paso es de reconocer que la pregunta

“Qué es el 25% de 40?”

quiere preguntar, en verdad,

“Qué número es el 25% de 40?”

Entonces, se piensa o se escribe

“Qué número es el 25% **por** 40?”

Usamos **x** para representar el número desconocido, de manera que

“Qué número es el 25% **por** 40?”

se convierte en

“**x** es el 25% **por** 40.”

Y para terminar la traducción, se escribe “ · “ en vez de “por”, y “ = “ en lugar de “es”:

$\mathbf{x} = 25\% \cdot 40$

Para despejar al **x**, es necesario cambiar “25%” en el número decimal equivalente a éste. Ya que

25% quiere decir $\frac{25}{100}$, y $25 \div 100 = 0.25$,

se tiene

$\mathbf{x} = 0.25 \cdot 40$.

Pero otra vez, la respuesta no se encuentra despejando al **x**. En cambio, el valor de **x** se encuentra efectuando la multiplicación:

$\mathbf{x} = 0.25 \cdot 40 = 10$.

Otro ejemplo:

“Qué es el 80% de 120?”

El primer paso es de reconocer que la pregunta

“Qué es el 80% de 120?”

quiere preguntar, en verdad,

“Qué número es el 80% de 120?”

Entonces, se piensa o se escribe

“Qué número es el 80% **por** 120?”

Usamos **x** para representar el número desconocido, de manera que

“Qué número es el 80% **por** 120?”

se convierte en

“**x** es el 80% **por** 120.”

Y para terminar la traducción, se escribe “ · “ en vez de “por”, y “ = “ en lugar de “es”:

$\mathbf{x} = 80\% \cdot 120$

Para despejar al **x**, es necesario cambiar “80%” en el número decimal equivalente a éste. Ya que

80% quiere decir $\frac{80}{100}$, y $80 \div 100 = 0.80$,

se tiene

$\mathbf{x} = 0.80 \cdot 120$

Pero otra vez, la respuesta no se encuentra despejando al **x**. En cambio, el valor de **x** se encuentra efectuando la multiplicación:

$\mathbf{x} = 0.80 \cdot 120 = 96.$

Otro ejemplo:

"Qué es el 90% de 60?"

En pocas palabras, se usa **x** para representar el número desconocido, " · " en lugar de la palabra "de", y "= " en lugar de la palabra "es", de manera que

$\mathbf{x} = 90\% \cdot 60.$

Ya que

$90\% = 0.90,$

se tiene

$\mathbf{x} = 0.90 \cdot 60 = 54.$

Problemas que tratan el % de aumento o decremento

Favor de notar que suelo dar ejemplos que tratan precios, pero las mismas ideas aplican en cualquier problema que trate cambios en el valor de un variable.

Clase IV: Problemas que nos cuentan el precio nuevo y el porcentaje de incremento, y nos piden el precio viejo.

Ejemplo:

El precio de hidras subió en un 25%, y actualmente es de 750 pesos por kilo. ¿Cuál fue el precio viejo?

Hay dos ideas claves para traducir este problema en una ecuación. La primera es

El precio actual = El precio viejo + el incremento.

En este momento, tal vez todavía no sepamos cómo resolver el problema, pero podemos trabajar con esta fórmula, apuntando en ella los datos que tenemos, y usando símbolos para las cantidades que desconocemos.

Bueno, el precio actual es un dato: 750 pesos. Entonces podemos apuntar este número en el lugar de las palabras "el precio actual":

750 pesos = El precio viejo + el incremento.

Ya que el precio viejo es una incógnita, lo representamos con un símbolo. Usemos la letra **V**. Entonces,

750 = **V** + el incremento

Bueno, hemos logrado todo esto sin tener que tratar "El incremento". Entonces, ¿cómo traducir el dato que tenemos en cuanto al incremento (es decir, que éste subió en un 2%) en una expresión matemática? Ya es tiempo de presentar la segunda idea clave:

Favor de notar que no es necesario efectuar la traducción en un sólo paso. Lo que es más,

¡Para empezar a resolver un problema, no es necesario saber de antemano todo paso de la resolución!

Por ejemplo, con frecuencia el acto mismo de apuntar los datos que tenemos y las ideas que nos vienen a la mente hará ocurrirnos una estrategia para resolver el problema.

Este, claro, es otro ejemplo del aspecto lingüístico de las matemáticas.

Con decir "El precio subió en un 25%", la persona que nos comunicó esto quería decir que el precio subió en un 25% del precio viejo.

En otras palabras, quería decir que el incremento es un 25% del precio viejo.

Ahora, usamos este nuevo conocimiento para escribir

750 pesos = **V** + 25% de **V**.

Supongo que puedes adivinar cuáles serían los dos pasos siguientes: se cambia la palabra "de" en el símbolo " × ", de manera que

750 pesos = **V** + 25% × **V**

y se cambia el "25%" en 0.25, su equivalente decimal:

750 pesos = **V** + 0.25 × **V** .

Para resolver esta ecuación, recordamos que **V** es la manera corta para escribir 1 × **V**, luego

750 pesos = 1 × **V** + 0.25 × **V** .

Por la propiedad distributiva,

1 × **V** + 0.25 × **V** = (1 + 0.25) × **V** = 1.25**V**,

por lo que

750 pesos = 1.25**V** .

Por fin, despejamos al símbolo **V**:

$$\mathbf{V} = \frac{750}{1.25} = 600 \text{ pesos.}$$

Cabe señalar una variante de la fórmula

El actual = El viejo + el incremento.

A saber, cuando un problema trata un cambio en el valor de una variable, sea este cambio ya hecho o sea previsto, podemos usar la fórmula

El valor después = El valor después + el incremento.

Por ejemplo, en el problema

"Actualmente hay 100 dinosaurios en la Republica Mexicana, pero los científicos creen que habrá un 80% más en 10 años. Según los científicos, ¿Cuántos habrá?"

escribiríamos

La población después = 100 + 80% × 100.

Otro ejemplo:

El número de pulpos en la pecera se ha incrementado en un 50% y actualmente es de 3. ¿Cuántos había antes?

Otra vez, las dos ideas claves:

1. El número actual = El número viejo + el incremento
2. "El número subió en un 50%" quiere decir que éste subió en un 50% del número viejo. En otras palabras, quiere decir que el incremento es un 50% del número viejo.

Ya que el número viejo es la cantidad que se nos pide encontrar, lo representamos con un símbolo. Usemos otra vez la letra **V**. Entonces,

El número actual = el número viejo + el incremento

se traduce en

El número actual = **V** + el incremento.

Pero el número actual es 3 pulpos, luego

3 pulpos = **V** + el incremento.

Ahora, usamos la idea de que el incremento es un 50% del número viejo; es decir, un 50% de **V**:

3 pulpos = **V** + 50% de **V**.

A continuación. se cambia la palabra “de” en el símbolo “ × “, de modo que

3 pulpos = **V** + 50% × **V**,

y se cambia el “50%” en 0.50, su equivalente decimal:

3 pulpos = **V** + 0.50 × **V** .

Para resolver esta ecuación, recordamos que **V** es la manera corta para escribir 1 × **V**, luego

3 pulpos = 1 × **V** + 0.50 × **V** .

Por la propiedad distributiva,

1 × **V** + 0.50 × **V** = (1 + 0.50) × **V** = 1.50**V**,

por lo que

3 pulpos = 1.50**V** .

Por fin, despejamos al símbolo **V**:

$$\mathbf{V} = \frac{3}{1.50} = 2 \text{ pulpos.}$$

Otro ejemplo:

En el año pasado, el consumo promedio anual de cacahuates subió en un 10%, y actualmente es de 550 Kg. cada niño. ¿Cuál era el consumo hace un año?

Otra vez, las dos ideas claves:

1. El consumo actual = El consumo viejo + el incremento
2. “El consumo subió en un 10%” quiere decir que éste subió en un 10% del consumo viejo. En otras palabras, quiere decir que el incremento es un 10% del consumo viejo.

Ya que el consumo viejo es la cantidad que se nos pide encontrar, lo representamos con un símbolo. Usemos otra vez la letra **V**. Entonces,

El consumo actual = el consumo viejo + el incremento

se traduce en

El consumo actual = **V** + el incremento.

Pero el consumo actual es de 550 Kg., luego

550 Kg. = **V** + el incremento.

Ahora, usamos la idea de que el incremento era un 10% del consumo viejo; es decir un 10% de **V**:

550 Kg. = **V** + 10% de **V**.

A continuación, se cambia la palabra “de” en el símbolo “ × “, de manera que

$$550 \text{ Kg.} = \mathbf{V} + 10\% \times \mathbf{V},$$

y se cambia el “10%” en 0.10, su equivalente decimal:

$$550 \text{ Kg.} = \mathbf{V} + 0.10 \times \mathbf{V}.$$

Ahora, recordamos que **V** es la manera corta para escribir 1 × **V**, luego

$$550 \text{ Kg.} = 1 \times \mathbf{V} + 0.10 \times \mathbf{V},$$

por lo que

$$550 \text{ Kg.} = 1.10\mathbf{V}.$$

Por fin, despejamos al símbolo **V**:

$$\mathbf{V} = \frac{550}{1.10} = 500 \text{ kg.}$$

Clase V: Problemas que nos cuentan el precio viejo y el porcentaje de incremento, y nos piden el precio nuevo.

Ejemplo:

> El consumo de café era de 50 litros cada gorila, pero subió en un 20%. ¿Cuál es el consumo actual?

OTRA VEZ

Favor de notar que no es necesario efectuar la traducción en un sólo paso. Lo que es más,

¡Para empezar a resolver un problema, no es necesario saber de antemano todo paso de la resolución!

Por ejemplo, con frecuencia el acto mismo de apuntar los datos que tenemos y las ideas que nos vienen a la mente hará ocurrirnos una estrategia para resolver el problema.

A diferencia de los problemas que acabamos de tratar, en este caso sabemos el consumo viejo, pero desconocemos el actual. Sin embargo, de todas maneras la traducción se efectúa partiendo de la misma idea

El consumo nuevo = El consumo viejo + El incremento.

Por desconocer el consumo nuevo, lo representamos con un símbolo. Voy a usar **N**, de manera que se puede escribir

N = El consumo viejo + El incremento.

El consumo viejo es 50 litros, por lo que podemos avanzar un poco más en nuestra traducción:

N = 50 + El incremento.

Bueno, hemos logrado todo esto sin tener que tratar “El incremento”. Entonces, ¿cómo traducir el dato que tenemos en cuanto al incremento (es decir, que éste subió en un 20%) en una expresión matemática?

Otra vez, como fue el caso para los problemas que acabamos de estudiar, el incremento se expresa como un porcentaje del consumo viejo. Concretamente, el 20% del consumo viejo. Luego podemos traducir un poco más:

N = 50 + 20% del consumo viejo.

Pero el consumo viejo es un dato: 50 litros. Entonces,

N = 50 + 20% de 50.

Usando las técnicas ya bien conocidas, esta última ecuación se transforma en

$$\mathbf{N} = 50 + 0.20 \times 50.$$

Ya vemos que no es necesario despejar al N; su valor se encuentra efectuando las operaciones en el lado derecho de la ecuación que acabamos de escribir. Entonces,

N = 60, o sea, 60 litros cada gorila.

Otro ejemplo:

> Hace cinco años, la altura de un árbol fue de 15 m, pero creció en un 20%. ¿Cuál es su altura actual?

Esta vez, voy a abreviar un poco la resolución.

La altura nueva = La vieja + El incremento.

"La vieja" es 15, luego

La altura nueva = 15 + El incremento.

"El incremento" es un 20% de la vieja, o sea, un 20% de 15. Por lo tanto,

La altura nueva = 15 + 20% × 15,

de manera que

La altura nueva = 15 + 0.20 × 15 = 18 m.

Nótate que esta vez, ¡no me molesté por usar un símbolo!

Otro ejemplo:

> Hace un año, mi murciélago mascota pesó 30 gramos, pero por ser muy abundante su comida (a saber, los mosquitos; ¿Acaso pensaste que mis mascotas son vampiros?) se engordó en un 40%. ¿Cuánto pesa actualmente?

Otra vez, voy a abreviar un poco la resolución.

Cuánto pesa actualmente = Su peso hace un año + En cuánto se engordó.

"Su peso hace un año" es 30 gramos, luego

Cuánto pesa actualmente = 30 + En cuánto se engordó.

"En cuánto se engordó" es un 40% de la vieja, o sea, un 40% de 15. Por lo tanto,

Cuánto pesa actualmente = 30 + 40% × 30,

de manera que

Cuánto pesa actualmente = 30 + 0.40 × 30 = 42 gramos.

Clase VI: Problemas que nos cuentan el precio nuevo y el porcentaje de decremento, y nos piden el precio viejo.

Ejemplo:

> El precio de tiburones se ha bajado en un 25%, y actualmente es de 9000 pesos cada uno. ¿Cuál fue su precio antes?

Todo lo que hemos aprendido sobre problemas que tratan incrementos vale también aquí. Otra vez hay dos ideas claves:

Cabe mencionar que es posible combinar a los temas de “incrementos” y “decrementos” usando una versión más general de la primera idea:

El nuevo = El viejo + El cambio

Cuando el cambio es un incremento, es un número de signo positivo. Un decremento es un cambio de signo negativo, por lo que la suma se cambia en una resta.

1. El precio actual = El precio viejo - el decremento.
2. “El precio subió en un 25%” quiere decir que el incremento es un 25% del precio viejo.

Reconocerás que éstas son muy parecidas a las dos ideas claves para los problemas de la Clase IV.

Manos a la obra: El precio actual es un dato: 9000 pesos. Entonces,

9000 = El precio viejo - el decremento.

El precio viejo es una incógnita; la representamos con **V**:

$9000 = \mathbf{V}$ - el decremento.

El decremento es el 25% del precio viejo, luego

$9000 = \mathbf{V} - 0.25\mathbf{V}.$

Ahora, se despeja al **V**:

$9000 = 1\mathbf{V} - 0.25\mathbf{V}.$

$9000 = 0.75\mathbf{V}.$

$\mathbf{V} = \frac{9000}{0.75} = 12{,}000$ pesos.

Otro ejemplo:

La población de mamuts en Chiapas se ha bajado en un 90%, y actualmente es de solamente 10. ¿Cuántos había antes?

Primero, escribamos la idea clave:

Población nueva = Población vieja - el decremento.

La población vieja es una incógnita, por lo que representamos con **V**.

Población nueva = **V** - el decremento.

La población actual es 10, luego

$10 = \mathbf{V}$ - el decremento.

El decremento es el 90% de **V**, de modo que

$10 = \mathbf{V} - 0.9\mathbf{V}.$

Ahora, se despeja al **V**:

$10 = 1\mathbf{V} - 0.9\mathbf{V}.$

$10 = 0.1\mathbf{V}.$

$\mathbf{V} = \frac{10}{0.1} = 100$ mamuts.

Otro ejemplo:

El precio de barómetros se bajó en un 15%, y actualmente es de 170 pesos. ¿Cuánto costaron antes?

En breve,

$170 = \mathbf{V} - 15\% \times \mathbf{V}.$

$170 = \mathbf{V} - 0.15\mathbf{V}.$

$170 = 1\mathbf{V} - 0.15\mathbf{V}.$

$170 = 0.85\mathbf{V}.$

$\mathbf{V} = \frac{170}{0.85} = 200$ pesos.

Clase VII: Problemas que nos cuentan el precio viejo y el porcentaje de decremento, y nos piden el precio nuevo.

Ejemplo:

> El preció de tigres era de 16,000 pesos cada uno, pero se bajó en un 10%. ¿Cuál es el precio actual?

Reconocerás que ésta problema es muy parecidas a los de la Clase V. Otra vez partimos de la idea:

El precio actual = El precio viejo - el decremento.

Manos a la obra: El precio actual es una incógnita, por lo que lo representamos por el símbolo **N**: dato: 9000 pesos.

N = El precio viejo - el decremento.

El precio viejo es un dato: 16,000 pesos:

N = 16,000 - el decremento.

El decremento es otro dato: el 10% del precio viejo; o sea, $0.10 \times 16{,}000$:

$\mathbf{N} = 16{,}000 - 0.10 \times 16{,}000$, luego

$\mathbf{N} = 14{,}400$ pesos.

Otro ejemplo:

> Había 50 esquimales en Chiapas, pero ya hay un 90% menos. ¿Cuántos hay actualmente?

La frase "ya hay un 90% menos" es otra manera de decir que la población se bajó en un 90%, por lo que (otra vez) partimos de la idea

La nueva = La vieja - el decremento.

Entonces,

$\mathbf{N} = 50 - 0.9 \times 50.$

$\mathbf{N} = 0.1 \times 50$

$\mathbf{N} = 5$ esquimales

Otro ejemplo:

> Había 3000 morsas en Barrio Las Delicias, pero ya hay un 95% menos. ¿Cuántas hay actualmente?

$\mathbf{N} = 3000 - 0.95 \times 3000.$

$\mathbf{N} = 0.05 \times 3000$

N = 150 morsas.

Clase VIII: Problemas que nos cuentan los valores viejos y actuales, y nos piden el porcentaje de incremento o decremento.

Ejemplo:

El preció de tigres era de 16,000 pesos cada uno, pero actualmente es de 20,000. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento?

Hay varias maneras de resolver este problema. Recomiendo la siguiente para empezar, pero después, puedes cambiar a una más directa.

Empezamos por escribir

El precio actual = El precio viejo + El incremento.

Los precios actuales y viejos son datos: 20,000 y 16,000 respectivamente. Por lo tanto escribimos

20,000 = 16,000 + El incremento.

También sabemos que según las normas del idioma de las matemáticas,

“El incremento” = (El porcentaje de incremento) × (El precio viejo).

Ya que “El porcentaje de incremento” es una incógnita, lo representamos con un símbolo. Usemos **P**, de manera que

“El incremento” = **P** ×(El precio viejo).

“El precio viejo” es un dato: 16,000 pesos. Entonces,

“El incremento” = **P** ×16,000.

Ahora, podemos substituir “**P** ×16,000” por “El incremento” en

20,000 = 16,000 + El incremento

para obtener

$$20{,}000 = \underbrace{16{,}000}_{\text{El viejo}} + \underbrace{\mathbf{P} \times 16{,}000}_{\text{El incremento}}.$$

Ahora, se despeja al **P**:

20,000 – 16,000 = **P** × 16,000.

4,000 = **P** × 16,000.

$$\mathbf{P} = \frac{4000}{16000} = 0.25, \text{ o sea, } 25\%.$$

Otro ejemplo:

El preció de pulpos era de 40,000 pesos cada uno, pero actualmente es de 60,000. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento?

Empezamos por escribir

El precio actual = El precio viejo + El incremento.

Los precios actuales y viejos son 60,000 y 40,000 respectivamente. Por lo tanto escribimos

60,000 = 40,000 + El incremento.

También sabemos que según las normas del idioma de las matemáticas,

"El incremento" = (El porcentaje de incremento) × (El precio viejo).

Ya que "El porcentaje de incremento" es una incógnita, lo representamos con un símbolo. Usemos **P**, de manera que

"El incremento" = **P** ×(El precio viejo).

"El precio viejo" es un dato: 40,000 pesos. Entonces,

"El incremento" = **P** × 40,000.

Ahora, podemos substituir "**P** × 40,000" por "El incremento" en

60,000 = 40,000 + El incremento.

para obtener

$$60{,}000 = \underbrace{40{,}000}_{\text{El viejo}} + \underbrace{\mathbf{P} \times 40{,}000.}_{\text{El incremento}}$$

Ahora, se despeja al **P**:

60,000 – 40,000 = **P** × 40,000.

20,000 = **P** × 40,000.

$\mathbf{P} = \frac{20000}{40000} = 0.5$, o sea, 50%.

Otro ejemplo:

El preció de hormigas era de 50,000 pesos cada tonelada, pero actualmente es de 30,000. ¿Cuál fue el porcentaje de decremento?

Este problema trata un decremento, por lo que empezamos escribiendo

El precio actual = El precio viejo - El incremento.

Los precios actuales y viejos son 30,000 y 50,000 respectivamente, por lo que escribimos

30,000 = 50,000 - El decremento.

También sabemos que

"El decremento" = (El porcentaje de decremento) × (El precio viejo).

Ya que "El porcentaje de incremento" es una incógnita, lo representamos con un símbolo. Usemos **P**, de manera que

"El decremento" = **P** ×(El precio viejo).

"El precio viejo" es un dato: 50,000 pesos. Entonces,

"El decremento" = **P** ×50,000.

Ahora, podemos substituir "**P** × 50,000" por "El decremento" en

30,000 = 50,000 - El decremento.

para obtener

$$30{,}000 = \underbrace{50{,}000}_{\text{El viejo}} - \underbrace{\mathbf{P} \times 50{,}000.}_{\text{El incremento}}$$

Ahora, se despeja al **P**:

30,000 – 50,000 = -**P** × 50,000.

-20,000 = -**P** × 50,000.

$- \mathbf{P} = \frac{-20000}{50000} = -0.4$

P = 0.4, o sea, 40%.

Otro ejemplo:

El peso de mi mamut mascota era de 3,000 kilos, pero ya es de 2,400.¿Cuál fue el porcentaje de decremento?

Empezamos por escribir

El peso actual = El viejo - El decremento.

Los pesos actuales y viejos son 3,000 y 2,400 respectivamente, por lo que escribimos

2,400 = 3,000 - El decremento.

También sabemos que

“El decremento” = (El porcentaje de decremento) × (El peso viejo).

Ya que “El porcentaje de incremento” es una incógnita, lo representamos con un símbolo. Usemos **P**, de manera que

“El decremento” = **P** ×(El precio viejo).

“El peso viejo” es un dato: 3,000 kg. Entonces,

“El decremento” = **P** × 3,000.

Ahora, podemos substituir “**P** × 3,000” por “El decremento” en

2,400 = 3,000 - El decremento.

para obtener

2,400 = 3,000 - **P** × 3,000.

Ahora, se despeja al **P**:

2,400 – 3,000 = -**P** × 3,000.

-600 = -**P** × 3,000.

$- \mathbf{P} = \frac{-600}{3000} = -0.2$

P = 0.2, o sea, 20%.

Clase IX: Problemas que tratan aumentos o decrementos, pero en verdad son problemas básicos disfrazados.

Ejemplo:

El precio de hormigas subió 30 pesos el kilo. Si este incremento fue un 15% del precio viejo, ¿cuál fue el precio viejo?

Fácilmente podría imaginarse que el alumno intentara resolver este problema como lo resolvería un problema de la Clase IV:

Precio nuevo = Precio nuevo + El incremento,

luego

Precio nuevo = Precio viejo + 30.

Pero no hay manera de seguir adelante, porque desconocemos el precio nuevo y el viejo también. Así que tenemos que buscar otra idea, por lo que leemos de nuevo el problema. Al leerlo, mantenemos presentes en la mente las tres preguntas

1. ¿Qué sabemos? (Es decir, ¿cuáles son los datos?
2. ¿Qué queremos? (Es decir, ¿qué se nos toca encontrar? o en otras palabras, ¿ Cuál es la incógnita?)
3. ¿Cómo se relacionan los datos con la incógnita?

Por habernos preparado la mente de esta manera, no tardamos en encontrar dos datos importantes:

- El incremento es de 30 pesos, y
- El incremento es un 15% del precio viejo.

Pensando en cuál es la incógnita, reconocemos que

- La cosa que nos toca encontrar es el mismo precio viejo.

Y en cuanto a "¿Cómo se relacionan los datos con la incógnita?", reconocemos que juntos, los dos datos

- El incremento es de 30 pesos, y
- El incremento es un 15% del precio viejo.

dicen que

30 pesos = El incremento, y

El incremento = un 15% del precio viejo

luego

30 pesos = un 15% del precio viejo.

Éste es un ejemplo de la **propiedad transitiva de la igualdad:**

Si ♣ = ▼ y ▼ = ♥, entonces ♣ = ♥ .

Bueno, para acabar con el problema, ya sabemos que

30 pesos = un 15% del precio viejo,

así que representamos el precio viejo con **V**, etc.:
$30 = 0.15 \times \mathbf{V}$

$$\mathbf{V} = \frac{30}{0.15} = 200 \text{ pesos.}$$

Otro ejemplo:

Tres preguntas altamente útiles para comprender un problema y resolverlo:

1. ¿Qué sabemos? (Es decir, ¿cuáles son los datos?
2. ¿Qué queremos? (Es decir, ¿qué se nos toca encontrar? o en otras palabras, ¿ Cuál es la incógnita?)
3. ¿Cómo se relacionan los datos con la incógnita?

Una hidra creció 2mm. Si este incremento era un 20% de su longitud anterior, ¿cuál fue su longitud anterior?

Leyendo con atención el problema, encontramos que

- El incremento = 2 mm, y
- Este mismo incremento = un 20% de su longitud anterior.

Entonces, usando **A** para su longitud anterior,

2 mm = 0.2 × **A**, luego **A** = 10 mm.

Otro ejemplo:

Hoy, los caracoles que viven en nuestra pecera pusieron 40 huevos menos de los que pusieron ayer. Éste es un decremento de un 50%. Entonces, ¿cuántos pusieron ayer?

Leyendo con atención el problema, encontramos que

- El decremento = 40 huevos, y
- Este mismo decremento = un 50% de su producción.

Entonces, usando **A** para su producción de ayer,

40 huevos = 0.5 × **A**, luego **A** = 80 huevos.

Resumen del capítulo

- ¿Para qué sirven los porcentajes?
  - Los porcentajes son, en verdad, una clase de fracción, y tienen los mismos usos.
  - Además, los porcentajes nos ayudan a comparar (por ejemplo) los grados de cambio en varios precios cuando los precios iniciales son desiguales.
- Cómo cambiar fracciones y decimales en porcentajes, y porcentajes en números decimales.
  - Los números decimales se cambian en porcentajes multiplicándolos por 100. Por ejemplo, 0.7 es equivalente a 70%. (0.7 × 100 = 70)
  - Los números fraccionarios se cambian en porcentajes cambiándolos primero en números decimales, para luego cambiar estos últimos en porcentajes de la manera arriba descrita. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ se cambia en un decimal dividiendo el numerador por el denominador: 1 ÷ 2 = 0.5, el cual es equivalente a 50%. (0.5 × 100 = 50).
  - Para cambiar porcentajes en decimales, se divide el porcentaje por 100. Por ejemplo, 25% = 0.25, ya que 25 ÷ 100 = 0.25.
- La idea clave para problemas con porcentajes:
  - La palabra “de” se traduce como “por”. Es decir, se traduce como “ × ”.

- La idea clave para resolver problemas que tratan el % de incremento o decremento:
  - Con decir (por ejemplo) "El precio subió en un 25%", la persona que nos comunicó esto quería decir que el precio subió en un 25% **del precio viejo**.
- Las tres clases de problemas básicos
  - **Clase I**: "¿Cuál porcentaje de 30 es 12?"
  - **Clase II**: "El 10% de un número desconocido es 3. ¿Cuál es el número?'
  - **Clase III**: "¿Cuál es el 20% de 80?"
- Problemas que tratan el % de aumento o decremento
  - **Clase IV:** Problemas que nos cuentan el precio nuevo y el porcentaje de incremento, y nos piden el precio viejo.
  - **Clase V:** Problemas que nos cuentan el precio viejo y el porcentaje de incremento, y nos piden el precio nuevo.
  - **Clase VI**: Problemas que nos cuentan el precio nuevo y el porcentaje de decremento, y nos piden el precio viejo.
  - **Clase VII:** Problemas que nos cuentan el precio viejo y el porcentaje de decremento, y nos piden el precio nuevo.
  - **Clase VIII:** Problemas que nos cuentan los valores viejos y actuales, y nos piden el porcentaje de incremento o decremento.
  - **Clase IX:** Problemas que tratan aumentos o decrementos, pero en verdad son problemas básicos disfrazados.
- Varias observaciones y consejos:
  - Cuando cambiamos un decimal en un porcentaje, en verdad estamos encontrando cuál sería la fracción de denominador 100 que sea equivalente al decimal.
  - En la hora de traducir un problema de planteo en una ecuación, no es necesario hacerlo en un sólo paso.
  - ¡Para empezar a resolver un problema, no es necesario saber de antemano todo paso de la resolución!
  - Con frecuencia el acto mismo de apuntar los datos que tenemos y las ideas que nos vienen a la mente hará ocurrirnos una estrategia para resolver el problema.
  - Es posible combinar a los temas de "incrementos" y "decrementos" usando la idea **El valor nuevo = El viejo + El cambio**. Cuando el cambio es un incremento, es un número de signo positivo. Un decremento es un cambio de signo negativo.
  - Tres preguntas altamente útiles para comprender un problema y resolverlo:
    1. ¿Qué sabemos? (Es decir, ¿cuáles son los datos?

2. ¿Qué queremos? (Es decir, ¿qué se nos toca encontrar? o en otras palabras, ¿ Cuál es la incógnita?)
3. ¿Cómo se relacionan los datos con la incógnita?